Supersymmetrie in der Zufallsmatrixtheorie

Mario Kieburg

Universität Duisburg-Essen

Duisburg, 04.05.2010

Übersicht

I. Spektralstatistiken in der Physik

II. Die Supersymmetriemethode

III. Supersymmetrische Strukturen und faktorisierbare Ensembles

I. Spektralstatistiken in der Physik

NORMIERTE SPEKTREN VERSCHIEDENER SYSTEME

Bohigas, Gianonni (1984), Hayes (2003)

Motivation

Fragen

- **Kann man all diese Spektren vergleichen?**
- **Was sind deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede oder gibt es sogar Universalitäten?**

Antwort auf die erste Frage

- **Entfaltung = Skalierung auf eine normierte Skala (Skala des lokalen, mittleren Niveauabstands)**
- Aufteilung in Unterspektren (bei guten Quantenzahlen wie Spin, Parität, Chiralität, etc.)

EIGENWERTKORRELATIONEN:

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, ein Niveau bei x_1 und ein anderes bei x_2 zu finden? $\Rightarrow$ Zweipunktkorrelation

$$R_2(x_1, x_2) = \overline{\rho(x_1)\rho(x_2)} = \int P(H)\rho(x_1)\rho(x_2)d[H]$$

mit ungemittelter Niveaudichte $\rho(x_i) = \sum_{n=1}^{N} \delta(x_i - E_n)$

$$\Rightarrow R_2(x_1, x_2) \overset{|x_1 - x_2| \to \infty}{\longrightarrow} \overline{\rho(x_1)}\,\overline{\rho(x_2)}$$

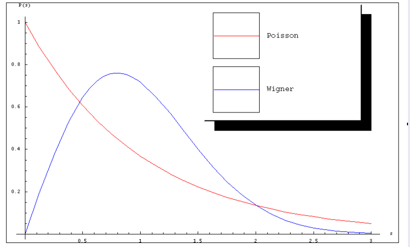
- Was ist die Wahrscheinlichkeit, zwei benachbarte Niveaus mit dem Abstand $s = |x_1 - x_2|$ zu finden?
$\Rightarrow$ Niveauabstandsverteilung $P(s)$:
keine Niveaus zwischen x_1 und x_2

$$\Rightarrow P(s) \overset{s \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

- etc.

Motivation

Niveauabstandsverteilung



Poisson Statistik

unabhängig, zufällig gewählte Eigenwerte des Hamilton Operators $H \Rightarrow H$ ist diagonal, keine Wechselwirkung zwischen den Niveaus

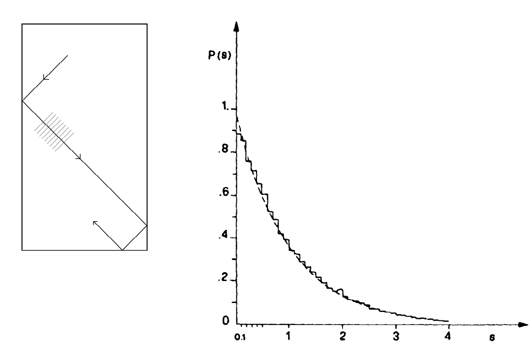
GOE Statistik

unabhängig, zufällig gewählte Einträge eines reell symmetrischen Hamilton Operators H (mit $\exp(-\mathrm{tr}\, H^2)$ Gauß'sch verteilt)

Billards (allgemein)

- stationäre Wellengleichung oder Schrödingergleichung in einem begrenzten 2-D Gebiet Ω: $\Delta\Phi = -\lambda\Phi$
- Dynamik resultiert aus den Randbedingungen: z.B. $\Phi|_{\partial\Omega} = 0$

Rechteckbilliard

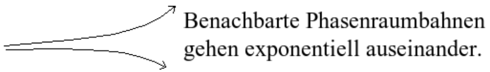


Stöckmann (1999)

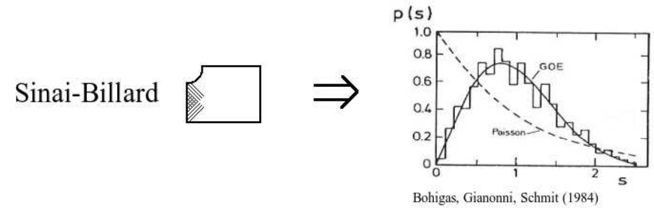
Motivation: Quantenchaos

Klassisches System

Es ist ein klassisch chaotisches System.



Quantenmechanisches System



Bohigas-Giannoni-Schmit Vermutung

⇒ Eigenwerkorrelationen des entfalteten Spektrums können durch eine reell symmetrische Zufallsmatrix modelliert werden.

Motivation: Mesoskopische Physik ungeordneter Systeme

Annahmen

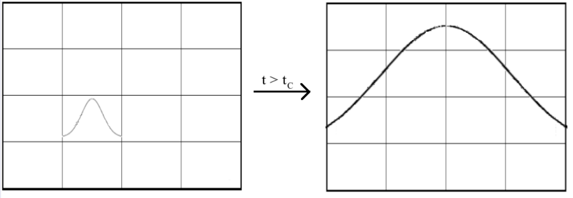
- Interferenzeffekte bei:
  Phasenkohärenzlänge $l_\phi \gg L$ Abmaße der Probe

$\Rightarrow$ **Klassische, physikalische Gesetze müssen wegen den Interferenzphänomenen modifiziert werden.**

- schwache Unordnung:
  elast. freie Weglänge $l_e \gg \lambda$ Wellenlänge der Wellenfunktion
- diffusives Regime:
  Abmaße der Probe $L \gg l_e$ elast. freie Weglänge
  Thouless Zeit (Energie) $t_C = L^2/D \quad (E_C = \hbar t_C)$
- ausgedehnte Wellenfunktion:
  Lokalisierungslänge $l_l \gg L$ Abmaße der Probe

Motivation: Mesoskopische Physik ungeordneter Systeme

Ausgedehnte Welle



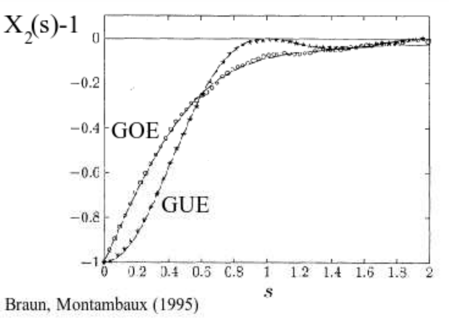
Zufallsmatrixtheorie

- $t < t_C$: Anfänglich lokalisiertes Wellenpaket hat nur wenige Elementarzellen erkundet.
- $t > t_C$: Ausgedehntes Wellenpaket hat die gesamte Probe erkundet.

$\Rightarrow$ Aufzeigen von universellem Verhalten bei physikalischen Beobachtungsgrößen

$\Rightarrow$ Anwendbarkeit der Zufallsmatrixtheorie

ZUFALLSMATRIXTHEORIE



entfaltete Zweipunktkorrelation X_2 über den Abstand der Energien $s = |x_1 - x_2|$:

•numerische Resultate (Kreise ohne B-Feld und Sterne mit B-Feld) für eine 8x8x8 zellige Probe (Anderson-Modell)

•Vorhersagen der Zufallsmatrixtheorie (durchgezogen)

Mittelungen über rotationsinvariante Matrixensembles:

- Quantenchaos
- Mesoskopische Physik ungeordneter Systeme
- Quantenchromodynamik (QCD)
- Zahlentheorie
- Darstellungstheorie: Weylsche Charakterformel
- etc.

II. Die Supersymmetriemethode

Grassmann Algebra

- komplexe Zahlen: $z_j z_i = z_i z_j$
- Grassmann Variablen: $\eta_j \eta_i = -\eta_i \eta_j$
  $\Rightarrow$ Grassmann Variablen sind nilpotent ($\eta_j{}^2 = 0$)
- gemischte Kommutatorrelationen: $z_j \eta_i = \eta_i z_j$
- komplexe Konjugation von Grassmann Variablen

$$(\eta_j{}^*)^* = -\eta_j \quad \text{und} \quad (\eta_j \eta_i)^* = \eta_j{}^* \eta_i{}^*$$

- Addition und Multiplikation $\Rightarrow$ Grassmann Algebra
- Superfunktion: $f(\eta_j, \eta_j{}^*) = f_{00} + f_{10}\eta_j + f_{01}\eta_j{}^* + f_{11}\eta_j\eta_j{}^*$
  z.B.: $\exp(a\eta_j\eta_j{}^*) = 1 + a\eta_j\eta_j{}^*$

SUPERMATRIZEN

- Supermatrix: $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{BB} & \sigma_{BF} \\ \sigma_{FB} & \sigma_{FF} \end{bmatrix}$
  σ_{BB} und σ_{FF} mit kommutierenden Einträgen; σ_{BF} und σ_{FB} mit antikommutierenden Einträgen
- $\sigma \left(\begin{array}{c} \text{Bosonen} \\ \text{Fermionen} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Bosonen} \\ \text{Fermionen} \end{array} \right)'$
- Superspur: $\mathrm{Str}\,\sigma = \mathrm{tr}\,\sigma_{BB} - \mathrm{tr}\,\sigma_{FF}$
- Superdeterminante: $\mathrm{Sdet}\,\sigma = \dfrac{\det\left(\sigma_{BB} - \sigma_{BF}\sigma_{FF}{}^{-1}\sigma_{FB}\right)}{\det \sigma_{FF}}$
- supersymmetrische Adjunktion: $\sigma^\dagger = \begin{bmatrix} \sigma_{BB}{}^\dagger & -\sigma_{FB}{}^\dagger \\ \sigma_{BF}{}^\dagger & \sigma_{FF}{}^\dagger \end{bmatrix}$

INTEGRATION

$$\int d\eta_i = 0 \qquad , \qquad \int \eta_i d\eta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Differenziale $d\eta_i$ sind ebenfalls antikommutierend!

BEISPIELE

- über Grassmann Variablen:
  $$\int \exp[\eta^\dagger A \eta] d[\eta] = \det\left(\frac{A}{2\pi}\right)$$
- über komplexe Variablen:
  $$\int \exp[-z^\dagger A z] d[z] = \det{}^{-1}\left(\frac{A}{2\pi}\right)$$

Sei f eine Superfunktion auf dem Superraum $\mathfrak{L}$ mit L Paaren von komplexen Grassmann Variablen und invariant unter solch einer Transformation ist, die $\mathfrak{L}$ auf den kommutierenden Anteil $\mathfrak{L}_C \subset \mathfrak{L}$ abbildet, dann gilt

$$\int f(x,\eta)d[\eta] \sim \sum_{n=0}^{L} \binom{L}{n} \Delta_{C,x}^{L-n}(-\Delta_{S,x})^n f(x,0)\,,$$

wobei $\Delta_{C,x}$ und $\Delta_{S,x}$ die Laplace-Beltrami-Operatoren auf den numerischen Teilen von $\mathfrak{L}_C$ und $\mathfrak{L}$ sind.

Integrationstheorem: Anwendungen

einfache Herleitungen von Cauchy-artigen Integralformeln:

$$\int f(x,\eta)d[x,\eta] \sim f(0)$$

kompakter Ausdruck als Startpunkt zur Berechnung von Efetov-Wegner-Termen (Randterme "b.t." durch Trafos):

$$\int f(x,\eta)d[x,\eta] = \int f(x',\eta')\mathrm{Ber}\,(x',\eta')d[x',\eta'] + \mathrm{b.t.}$$

Berezinian: Ber (Jacobian im Superraum)

kompakter Zusammenhang zwischen gewöhnlichem und Supermatrix-Bessel-Funktionen

$$\phi_{p/q}(s,x) \sim [\mathrm{Str}\,x^2 - \Delta_s]^{pq}\phi_p(s_B,x_B)\phi_q(s_F,x_F)\prod_{a,b}(s_{aB}-s_{bF})^2$$

$\Rightarrow$ Zusammenhang zwischen gewöhnlichen und Superraum über die harmonische Analysis

Erzeugende Funktion

Startpunkt

$$Z_k(\kappa) \sim \int P(H) \prod_{i=1}^{k} \frac{\det(\kappa_{i2} + H)}{\det(\kappa_{i1} + H)} d[H]$$

- Wahrscheinlichkeitsdichte P sei rotationsinvariant
- $\kappa_{i1} = x_i + J_i$, $\qquad \kappa_{i2} = x_i - J_i$
- $J = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Z(x) = 1$
- H ist eine Hermitesche $N \times N$ Matrix.

Beziehung zu Green'schen und k-Punktkorrelationsfunktionen

$$R_k(x) \sim \left. \frac{\partial^k}{\partial J_1 \ldots \partial J_k} Z_k(\kappa) \right|_{J=0}$$

ERGEBNISSE

$$
\begin{aligned}
Z_k(\kappa) &= \int P(H) \prod_{i=1}^{k} \frac{\det(\kappa_{i2}+H)}{\det(\kappa_{i1}+H)} d[H] \\
&\sim \int Q(\sigma)\, \mathrm{Sdet}^{-N}(\sigma-\kappa) d[\sigma] \\
&\sim \int_{\text{flach}} \Phi(\rho)\, I_N(\rho) \exp(-\imath \mathrm{Str}\, \kappa\rho) d[\rho] \\
&\sim \int_{\text{kompakt}} \Phi(\rho)\, \mathrm{Sdet}^{N}\rho \exp(-\imath\kappa\rho) d[\rho]
\end{aligned}
$$

- Φ ist die charakteristische Funktion von P und Q in verschiedenen Räumen.
- **Dimensionen von σ und ρ sind nicht von N abhängig, sondern hängen nur von k ab!**

WEITERE ERGEBNISSE

- Verallgemeinerte Hubbard-Stratonovich-Transformation und die Superbosonisierungsformel sind äquivalent.
- direkte Integraldarstellung von

$$Q(\sigma) \sim \int P\left(\begin{bmatrix} H & W^\dagger \\ W & \sigma \end{bmatrix}\right) d[H,W]$$

W ist eine rechteckige Supermatrix.

$\Rightarrow$ P Gauß'sch $\Rightarrow$ Q Gauß'sch

- Ergebnisse sind für reell symmetrische und Hermitesch selbstduale Matrixensembles erweitert worden.

AUSBLICKE

- Untersuchung der Abbildung von $P \longrightarrow Q$
- Untersuchung von $N \to \infty$ (Universalitätsbeweis mit exakter Bestimmung der notwendigen Anforderungen)

III. Supersymmetrische Strukturen und faktorisierbare Ensembles

DETERMINANTENSTRUKTUREN BEIM DIAGONALISIEREN

- Hermitesche $N \times N$ Matrix: $H = H^\dagger = UEU^\dagger$

$\Rightarrow$ Vandermonde Determinante:

$$\sqrt{\mathrm{Jac}(E)} = \Delta_N(E) = \det[E_a^{b-1}]$$

- Hermitesche $(p+q) \times (p+q)$ Supermatrix: $\sigma = \sigma^\dagger = UsU^\dagger$

$\Rightarrow$ Berezinian $(p \leq q)$:

$$\sqrt{\mathrm{Ber}_{p/q}(s)} = \det \left[\begin{array}{c} \dfrac{1}{s_{a1} - s_{b2}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ s_{b2}^{a-1} \end{array} \right]$$

Nur diese Strukturen sind wichtig für die Herleitung der folgenden Resultate!

$$Z_k(\kappa) = \int P(H) \prod_{j=1}^{k} \frac{\det(H - \kappa_{j2})}{\det(H - \kappa_{j1})} d[H]$$

$$\overset{H=UEU^\dagger}{\sim} \int \prod_{a=1}^{N} \left[\widetilde{P}(E_a) \prod_{j=1}^{k} \frac{E_a - \kappa_{j2}}{E_a - \kappa_{j1}} \right] \Delta_N^2(E) d[E]$$

Wahrscheinlichkeitsdichte P faktorisierbar:

$$P(E) = \prod_{j=1}^{N} \widetilde{P}(E_j) \quad , \text{ mit } E = \mathrm{diag}\,(E_1, \ldots, E_N)$$

Man weiß, dass diese erzeugende Funktion eine Determinantenstruktur besitzt!
Baik, Deift, Strahov (2003); Grönqvist, Guhr, Kohler (2004); Borodin, Strahov (2005); Guhr (2006)

Idee

$$Z_k(\kappa) = \int P(H) \prod_{j=1}^{k} \frac{\det(H - \kappa_{j2})}{\det(H - \kappa_{j1})} d[H]$$

$$\sim \int \prod_{a=1}^{N} \left[\underline{\widetilde{P}(E_a) \prod_{j=1}^{k} \frac{E_a - \kappa_{j2}}{E_a - \kappa_{j1}}} \right] \underline{\Delta_N^2(E)} d[E]$$

Wahrscheinlichkeitsdichte P faktorisierbar:

$$P(E) = \prod_{j=1}^{N} \widetilde{P}(E_j) \quad , \text{ mit } E = \mathrm{diag}\,(E_1, \ldots, E_N)$$

Kann durch $\sqrt{\mathrm{Ber}}$-Terme ausgedrückt werden! $\Rightarrow$
Determinantenstrukturen sind offensichtlich enthalten.

Ziel

$$Z_k(\kappa) \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ber}_{k/k}(\kappa)}} \det\left[\frac{Z_1(\kappa_{a2}, \kappa_{b1})}{\kappa_{a2} - \kappa_{b1}}\right]$$

$\kappa = \mathrm{diag}\left(\kappa_{11}, \ldots, \kappa_{k1}, \kappa_{12}, \ldots, \kappa_{k2}\right)$
Erzeugende Funktion der **k-Punktkorrelationsfunktion** kann durch erzeugende Funktionen von **Einpunktkorrelationsfunktionen** ausgedrückt werden!

Ähnliche Ergebnisse können auch für Pfaff'sche Strukturen gefunden werden!
Bemerkung: Pfaffian = Wurzel einer Determinante von einer antisymmetrischen Matrix

Strukturen bleiben im $N \to \infty$ Limes erhalten!

Ergebnisse

Für Determinanten und Pfaffians

- Strukuren sind Resultate aus rein algebraischen Eigenschaften.
- Faktorisierung der Verbundswahrscheinlichkeitsdichte bis auf Potenzen der Vandermonde Determinante
  Keine anderen Bedingungen sind nötig.

$\Rightarrow$ anwendbar für eine große Klasse von Matrixensembles

- **wenn viele charakteristische Polynome im Nenner:**
  sehr einfache Strukur der Einträge der Determinanten und Pfaffians:
  algebraische Terme (keine Integrale) und Integrale von niedrigdimensionalen Matrizen
- weitreichende Einsichten und Folgen in der Beziehung zwischen der orthogonalen Polynommethode und der Supersymmetriemethode

Für Pfaff'sche Strukturen

Die Pfaff'sche Struktur von reellen und reell quaternionischen Ensembles haben den gleichen Ursprung!

Andere Anwendungen

- Ensembles im äußeren Feld und Übergangsensembles
- Berechnung aller Efetov-Wegner-Terme for das unitäre, supersymmetrische Itzykson-Zuber Integral
- Berechnungen in Superräumen

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!