UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Dr. rer. nat. Mario Kieburg
Fakultät für Physik
Mathematische Physik

supported by SFB | TR12
Symmetries and Universality in Mesoscopic Systems

Supersymmetry in Random Matrix Theory

Einführung und Motivation

In vielen physikalischen Systemen finden sich Niveauverteilungen wieder, seien es die Energieniveaus von Quantensystemen, die Schwingungsfrequenzen eines Körpers oder aber auch die zeitliche Abfolge von Ereignissen. Das Gleiche gilt in Gebieten die außerhalb des physikalischen Anwendungsspektrums liegen (siehe **Abb.1**), z.B. in der Zahlentheorie, einem Teilgebiet der Mathematik; Ereignisse des Handels in der Finanzwelt; Statistiken im Alltag usw. Diese recht unterschiedlichen Systeme, welche über mehrere Skalen und unterschiedliche Observablen gehen, möchte man gerne vergleichen, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den statistischen Eigenschaften (z.B. die Abstandsverteilung benachbarter Niveaus, **Abb.2**) herauszufiltern. Es zeigt sich, dass auf der Skala des mittleren Niveauabstandes der jeweiligen Systeme universelle Eigenschaften zum Vorschein kommen, die nicht von den Einzelheiten des gewählten Untersuchungsobjektes abhängen, sondern nur von globalen Symmetrien des Systems. Als stark vereinfachte Idealsysteme gelten die Zufallsmatrizen. Das sind Matrizen, deren Einträge mit Zufallsvariablen besetzt werden. Mit ihnen ist es möglich, analytische Resultate herzuleiten, die sonst wegen der Komplexität der betrachteten Systeme verwehrt bleiben würden.

Abb.1: Diverse Niveauverteilungen in der Physik, Mathematik und des Alltags, welche auf den mittleren Niveauabstand normiert worden sind. Von links nach rechts: Harmonischer Oszillator; unabhängig, zufällig gewählte Niveaus; Harmonischer Oszillator mit kleiner zufälliger Störung der einzelnen Niveaus; Energienivaus des Erbium-166 Kerns; Eigenwerte einer reell symmetrischen Zufallsmatrix; nichttriviale Nullstellen der Riemann'schen Zetafunktion; Primzahlen; Lage von Brücken entlang der Interstate 85; Lage von Bahnübergängen entlang einer Bahnstrecke; Baumringe; zeitliche Abfolge von Erdbeben in Kalifornien mit einer Stärke größer als 5.0; Lage von hintereinanderfahrenden Fahrradfahrern. **Entnommen von:** B. Hayes, *The Spectrum of the Riemannium*, Computing Science Vol.91 No.4, Seiten 296-300 (2003)

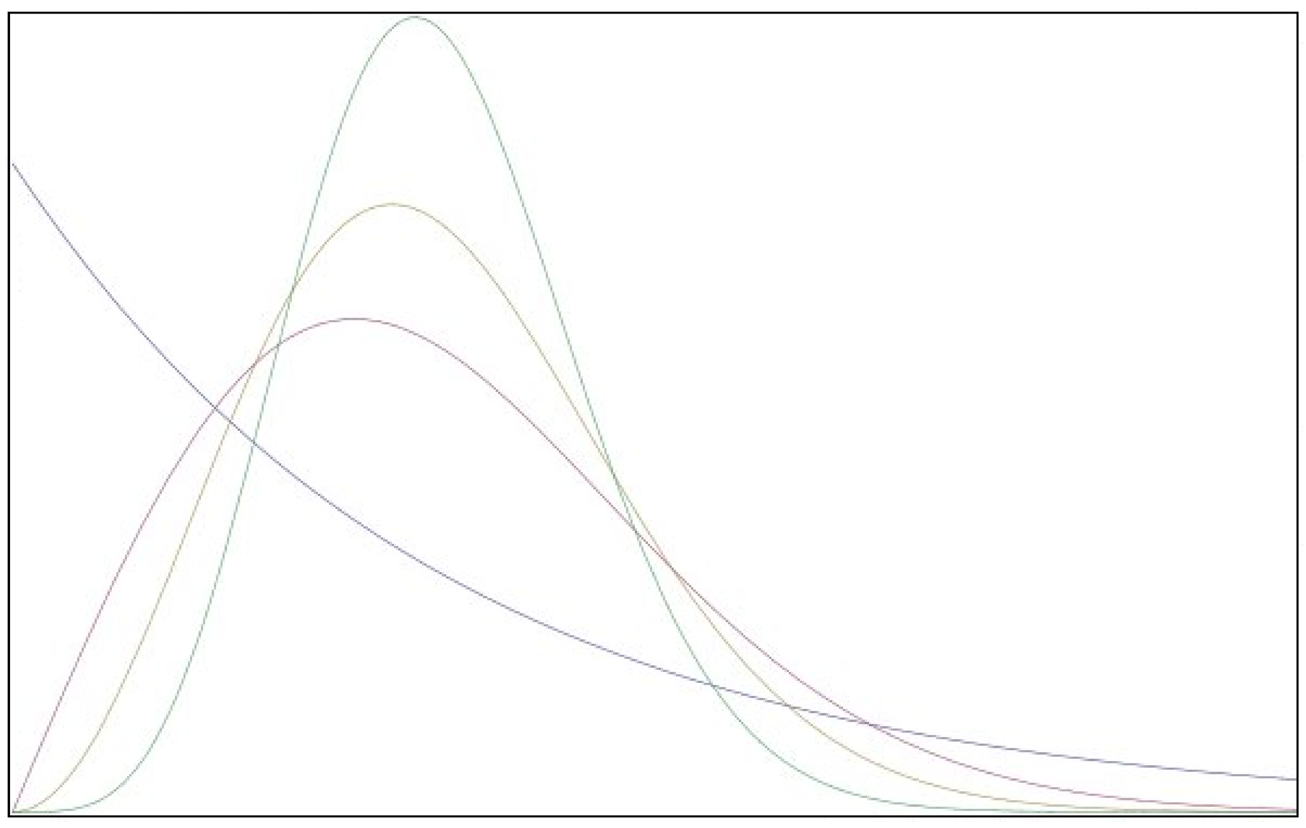

Abb.2: Universelle Niveauabstandsverteilungen für Poisson verteilte Niveaus (unabhängig, zufällig gewählte Niveaus, blau) und Gaußverteilte reel symmetrische Matrizen (rot), Hermite'sche Matrizen (gelb) und quaternionisch selbstduale Matrizen (grün).

Supersymmetrie und die Zufallsmatrixtheorie

Supersymmetrie ist die Rechenmaschinerie zwischen kommutierenden und antikommutierenden Variablen. Berühmte Beispiele für kommutierende Variablen sind die reellen oder komplexen Zahlen. Leider fehlt eine ebenfalls gute Anschauung der antikommutierenden Variablen, welche in der Teilchenphysik das erste Mal zur Beschreibung klassischer Fermionen (z.B. Elektronen) eingeführt worden sind. In der Zufallsmatrixtheorie dient das Zusammenspiel von kommutierenden und antikommutierenden Variablen nur als mathematisches Hilfsmittel und physikalische Interpretationen sind mit Vorsicht zu genießen. Die Supersymmetriemethode ist eine elegante Methode, hochdimensionale Integrale über gewöhnliche Matrizen auf niederdimensionale Integrale über Supermatrizen abzubilden. Der Vorteil für numerische Berechnungen ist enorm und auch exakt analytische Resultate sind dadurch leichter zugänglich.

In meiner Arbeit habe ich allgemeine Wahrscheinlichkeitsdichten betrachtet, da gewöhnlich nur Gauß-Verteilungen als Standardmodell genutzt werden. Ich habe die Supersymmetriemethode für diese Art von Ensembles erweitert und auch fundamentale Zusammenhänge zwischen den gewöhnlichen und den supersymmetrischen Zufallsmatrizen herausgefunden. Es stellte sich zum Beispiel heraus, dass die seit zwanzig Jahren bekannten Strukturen der Niveaukorrelationen wie Determinanten und Pfaff'sche Determinanten auf die Supersymmetrie als Howe-duales System zurückgehen. Solche Strukturen liefern eine weitere, starke Vereinfachung der Integrale und des damit verbundenen numerischen Aufwands. Größtenteils habe ich eine Ansammlung von mathematischen Methoden ausgearbeitet, die ein Rüstzeug für zukünftige Anwendungen darstellen soll. Einige Anwendungen in der Analyse von Korrelationsmatrizen und der Quantenchromodynamik haben schon von diesen neuen Verständnissen profitiert.

Zur Person

- 2007 Diplom in Physik an der TU Berlin mit der Diplomarbeit in der Gruppe Borzeszkowski mit dem Thema der Quantengravitation
- 2007-2011 in der Gruppe Guhr im Teilgebiet der Zufallsmatrixtheorie
- seit 2011 an SUNY Stony Brook, NY, in der Gruppe Verbaarschot mit dem Forschungsgebiet der Anwendung der Zufallsmatrixtheorie in der Quantenchromodynamik, gefördert durch ein Feodor-Lynen Stipendium der Alexander von Humboldt Stiftung

Publikationen, die während der Doktorarbeit entstanden sind:

[1] M. Kieburg, H. Kohler, and T. Guhr. *J. Math. Phys.*, 50:013528, 2009.

[2] M. Kieburg, J. Grönqvist, and T. Guhr. *J. Phys.*, A 42:275205, 2009.

[3] M. Kieburg, H.-J. Sommers, and T. Guhr. *J. Phys.*, A 42:275206, 2009.

[4] M. Kieburg and T. Guhr. *J. Phys.*, A 43:075201, 2010.

[5] M. Kieburg and T. Guhr. *J. Phys.*, A 43:135204, 2010.

Betreuer:

Prof. Dr. Thomas Guhr